Artículo de investigación

Recepción: 3 de agosto de 2018
Aprobación: 30 de enero de 2019

EL PROBLEMA DE LA TANGENTE, UNA NUEVA VISIÓN A UN ANTIGUO PROBLEMA

THE TANGENT PROBLEM, A NEW VISION TO AN ANCIENT PROBLEM

Rafael Mauricio Angarita Cervantes
Magister en Educación
Secretaría de Educación del Distrito
(Bogotá, Colombia)
rafael_angarita@javeriana.edu.co

Resumen

Este artículo es el resultado de las reflexiones que, como docente de bachillerato, han surgido al notar la dificultad manifiesta de los estudiantes con respecto a la asignatura de cálculo. Se consolida una propuesta centrada en el análisis y determinación de la solución al problema de la ecuación de la recta tangente a funciones polinómicas; solución que se extiende a funciones de la forma $f(x) = ax^n f(x) = ax^n$, con $n \in \mathbb{Q} n \in \mathbb{Q}$ y $a \in \mathbb{R} a \in \mathbb{R}$, por medio de la llamada derivada de Caratheodory; se concluye con una aproximación alternativa que puede también ser objeto de estudio, incluso a nivel elemental.

Palabras clave: cálculo diferencial, recta tangente, derivada Caratheodory, geometría, polinomios.

Abstract

This article is the result of the reflections that, as a high school teacher, have emerged from noticing the students' clear difficulty regarding the calculus subject. It is consolidated a proposal focused on the analysis and determination of the solution to the equation problem of the tangent line to polynomial functions; this solution is extended to form functions$f(x) = ax^n$ $f(x) = ax^n$, with $n \in \mathbb{Q} n \in \mathbb{Q}$ and $a \in \mathbb{R} a \in \mathbb{R}$, by means of the so-called Caratheodory derivative; it is concluded with an alternative approximation that can also be object of study, even at elementary level.

Keywords: differential calculus, tangent line, Caratheodory derivative, geometry, polynomials.

O PROBLEMA DO TANGENTE, UMA NOVA VISÃO A UM VELHO PROBLEMA

Resumo

Este artigo é resultado das reflexões que, como professor de ensino médio, surgiram ao perceber a dificuldade manifesta dos alunos em relação à matéria de cálculo. Uma proposta focada na análise e determinação da solução para o problema da equação da reta tangente às funções polinomiais é consolidada; solução que se estende às funções da forma: $f(x) = ax^n$, com $n \in \mathbb{Q}$ e $a \in \mathbb{R}$, por meio da chamada derivada de Caratheodory; Conclui com uma abordagem alternativa que também pode ser estudada, mesmo no nível elementar.

Palavras-chave: cálculo diferencial, linha tangente, derivada de Caratheodory, geometria, polinômios.

LE PROBLÈME DE LA TANGENTE, UNE NOUVELLE VISION À UN PROBLÈME ANCIEN

Résumé

Cet article est le résultat des réflexions qui, comme enseignant d'école secondaire, ont émergé de la constatation de la difficulté manifeste des élèves par rapport à ce qui concerne le sujet du calcul. On consolide une proposition centrée sur l'analyse et la détermination de la solution au problème de l'équation de la ligne tangente aux fonctions polynomiales; une solution qui s'étend aux fonctions de la forme

$f(x) = ax^n f(x) = ax^n$, avec $n \in \mathbb{Q} n \in \mathbb{Q}$

et $a \in \mathbb{R} a \in \mathbb{R}$, au moyen de ce que l'on appelle le dérivé de Carathéodory; il est conclu par une approche alternative qui peut également bien faire l'objet d'études, même à l'élémentaire.

Mots-clés: calcul différentiel, tangente, dérivée de Carathéodory, géométrie, polynômes.

Introducción

Como docentes del área de matemáticas, consideramos de vital importancia el constante cuestionamiento acerca de nuestras prácticas pedagógicas; dicho ejercicio no solo debe ceñirse a la selección de un recurso didáctico o material manipulable, o un software nuevo para complementar las clases, sino también apuntar a la manera en la que acercamos a los estudiantes a los conceptos nuevos, de forma que el alcance de los objetivos de la educación sea una realidad. Cargamos además con la responsabilidad de lograr que el gusto por la asignatura aumente a medida que conocen más de ella, o avanzan de grado, luchando en contra de todos los comentarios y estereotipos de los que es objeto nuestra área, y que impiden que sean notorias y descubiertas todas esas cosas bellas y apasionantes que nosotros podemos apreciar pero que, de alguna manera, nuestros estudiantes no (MEN, 1998).

Es así que, se aporta a la discusión presentando a la comunidad la formulación de derivada según Caratheodory, que se constituye en una alternativa a la definición de derivada por medio de límites, o formulación de Cauchy, desde la cual se ha logrado abrir el espacio para explorar y pensar en algunas preguntas que han derivado en una transformación significativa de la clase de cálculo.

Algunas de las preguntas que han orientado la consolidación de esta propuesta, son: ¿cuál es la excusa para enseñar cálculo, o los métodos del cálculo, a nuestros estudiantes?, y, ¿por qué es importante que lo aprendan? La historia nos indica que los métodos del cálculo resultaron de utilidad en la solución sistemática de algunos problemas de áreas como la geometría, física, entre otros campos del saber; ante esto, ¿es posible abordar la clase de cálculo desde la necesidad, o interés, de solucionar alguno de ellos?, ¿iniciar con un problema en lugar de una serie de métodos, nociones y conceptos que puedan parecer a los estudiantes como una lista de temas necesarios para aprobar la asignatura?, ¿sería conveniente dar un papel más notorio a la historia de las matemáticas? Por ejemplo, estudiando los trabajos de aquellos personajes significativos de la historia de esta ciencia, desde la motivación de crear un ambiente controlado de trabajo matemático, iniciando con casos sencillos, escalando a los más complicados; como por ejemplo ¿cómo determinamos la recta tangente a una curva en un punto de su dominio?

Es precisamente la solución a esta última pregunta, alrededor del cual gira este escrito; iniciando con un breve estudio de algunas de las características de las funciones polinómicas, que dará una buena excusa para introducir la formulación de derivada de Caratheodory, como una herramienta potente para justificar la solución a este interrogante en un amplio grupo de funciones, sin requerir el uso del concepto de límite. Además, esta formulación admite una construcción en el software Geogebra, que permite la visualización de las tangentes a las funciones en los puntos de su dominio, constituyéndose en una verificación gráfica de la solución del problema propuesto.

Si bien este es un avance de la propuesta, se concluye la exposición de la misma con la descripción de las primeras aproximaciones a las respuestas de algunas de las dudas manifestadas por los estudiantes en este proceso, entre ellas:

- Teniendo en cuenta que las tangentes a una parábola cumplen con la definición de recta tangente dada por Euclides, ¿qué característica tiene la recta tangente a una parábola en su vértice?

- ¿Cómo determinar las coordenadas de los puntos máximos y mínimos de un polinomio en el intervalo que contiene los cortes del polinomio con el eje horizontal?

Los cuestionamientos anteriores, junto con una nueva aproximación al concepto central del cálculo diferencial, sirven como punto de partida para el desarrollo y aplicación de esta propuesta.

Discusión

El problema de la recta tangente

En las matemáticas de la antigua Grecia, encontramos algunas soluciones particulares al problema de determinar la recta tangente a algunas curvas, Knorr (1993) es una excelente referencia al respecto. Con relación a nuestras matemáticas escolares, son comunes algunos problemas que involucran la determinación de tangentes a circunferencias o problemas acerca de ángulos externos, inscritos y semi inscritos, los cuales se abordan utilizando una lista de teoremas que hacen de estos problemas algo rutinario; por ejemplo, para la construcción de una mesa circular a partir de una tabla cuadrada, pueden considerarse los bordes de la tabla como tangentes al círculo, lo que permite hacer uso de, entre otros, los siguientes teoremas:

Teorema 1. Si una recta es perpendicular a un radio en un punto del círculo, entonces la recta es tangente al círculo.

Teorema 2. Si una recta es tangente a un círculo, entonces el radio trazado hasta el punto de contacto es perpendicular a la tangente.

Junto con algunos resultados concernientes a las mediatrices de cuerdas, es posible delimitar los arcos circulares de la mesa. Estas construcciones pueden, incluso, ser elaboradas con la ayuda de software de geometría dinámica o con la ayuda de la regla y el compás. Pero, ¿y si nos interesa la tangente a una curva, no necesariamente una circunferencia, en uno de sus puntos? En particular, ¿cómo determinar la recta tangente a una función polinómica en un punto de su dominio?

Las funciones polinómicas conforman una familia con unas características muy particulares, muchas de las cuales pueden ser demostradas por medio de manipulaciones sencillas y también verificadas desde las representaciones gráficas correspondientes; se propone entonces un trabajo en el que, por medio de dos resultados importantes, se obtenga una solución metódica a dicha pregunta, y lo mejor, sin necesidad de utilizar el concepto de límite; logrando así una propuesta dirigida a las clases de matemáticas a nivel elemental y además una alternativa a considerar en las clases de cálculo diferencial.

La ecuación de una recta puede caracterizarse y determinarse de varias maneras, entre ellas: indicando la razón entre la elevación y avance de la recta, y el corte de la misma con el eje yy; o indicando dos puntos que pertenezcan a la misma. En los dos casos mencionados, hallar la ecuación requiere el cálculo de la pendiente. Entonces, si se aplica la definición de pendiente de una recta a la función $f_1(x) = pxf_1(x) = px$, y se hace uso del llamado factor común (propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma):

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{f_1(x)-f_1(a)}{x-a} \\ &= \frac{px-pa}{x-a} \\ &= \frac{p(x-a)}{x-a} \\ &= p \end{aligned}$$

Se obtiene el coeficiente de la variable que, como se sabe, corresponde al valor de la tangente del ángulo de la recta con el eje horizontal, es decir, la pendiente.

¿Qué sucede con el polinomio $f_2(x) = x^2 f_2(x) = x^2$? Aprovechando que son funciones muy bien comportadas y con el uso de algunos resultados sobre factorización de polinomios, en este caso particular, el uso de la llamada diferencia de cuadrados, es posible asegurar que

$$\begin{aligned} g_2(x) &= \frac{f_2(x)-f_2(a)}{x-a} \\ &= \frac{x^2-a^2}{x-a} \\ g_2(x) &= (x+a) \end{aligned}$$

La interpretación dada a $g_1(x) g_1(x)$ no aplica para $g_2(x) g_2(x)$, pero se insiste en pensar que $g_2(x) g_2(x)$ está relacionada con las tangentes a $f_2(x) f_2(x)$. Para ello, se aplican los cálculos anteriores a un punto perteneciente a la gráfica de $f_2(x) f_2(x)$: por ejemplo, para el punto $(a, f_2(a)) = (-2{,}4)(a, f_2(a)) = (-2{,}4)$, se sigue que $g_2(x) = x - 2 g_2(x) = x - 2$ y entonces $g_2(a) = g_2(-2) = -4 g_2(a) = g_2(-2) = -4$. Se tiene a disposición un punto perteneciente a la función $f_2 f_2$,$(-2{,}4)(-2{,}4)$, y un valor, $g_2(a) = -4 g_2(a) = -4$; ante la intención de determinar la ecuación de la recta tangente a $f_2(x) f_2(x)$, ¿qué idea viene a nuestra mente? - ¡Utilizar esos dos datos y aplicar la forma punto - pendiente para la determinación de la ecuación de una recta! Veamos:

$$\begin{aligned} y - f_2(a) &= m(x-a) \\ y - f_2(a) &= g_2(a)(x-a) \\ y - 4 &= -4(x+2) \\ y &= -4(x+2)+4 \end{aligned}$$

¿Qué relación hay entre la función $f_2(x)f_2(x)$ y la recta $y = -4(x+2)+4$ $y = -4(x+2)+4$? (véase la Figura 1).

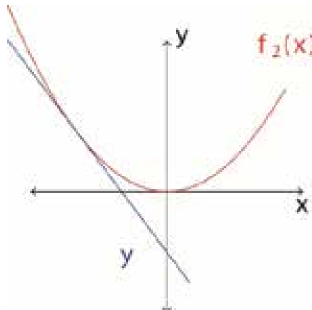

Figura 1. ¡La recta obtenida es tangente a $f_2(x)f_2(x)$ en $(-2{,}4)(-2{,}4)$!

¿Funciona siempre o solo fue suerte? Para el punto $(a, f_2(a)) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)(a, f_2(a)) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$, se sigue que $g_2(x) = x + \frac{1}{4}g_2(x) = x + \frac{1}{4}$, y, por lo tanto, $g_2(a) = g_2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ $g_2(a) = g_2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$; siguiendo los pasos anteriores, se obtiene la ecuación $y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{16}y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{16}$, cuya gráfica se puede ver en la Figura 2.

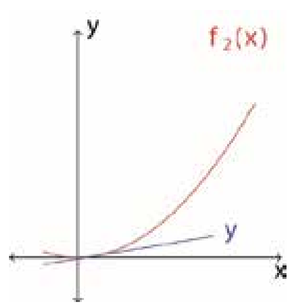

Figura 2. ¡La recta obtenida es tangente a $f_2(x)f_2(x)$ en $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$!

De otro lado, el punto mínimo, o el vértice, de la función $f_2(x)f_2(x)$ se encuentra en $(0,0)(0,0)$, por lo que en este punto la tangente es horizontal, es decir, la pendiente es igual a cero; y efectivamente se verifica que $g_2(0) = 0 + 0 = 0g_2(0) = 0 + 0 = 0$, con lo que hay fuertes indicios para pensar en $g_2(x)g_2(x)$ como la función de las pendientes de las rectas tangentes a $f_2(x)f_2(x)$. En efecto, al tener que $g_2(x) = x + ag_2(x) = x + a$ entonces $g_2(a) = 2ag_2(a) = 2a$, y esto coincide con los resultados que se obtendrían utilizando los métodos del cálculo diferencial, puede asegurarse que $g_2(x)g_2(x)$ sí es la función de pendientes de las rectas tangentes a $f_2(x)f_2(x)$.

Un ejemplo más: para la función $f_7(x) = x^7 f_7(x) = x^7$, en la determinación de $g_7(x)$ $g_7(x)$, con $a = -\frac{1}{3}a = -\frac{1}{3}$, el teorema del binomio de Newton (cocientes notables) cobra relevancia, pues:

$$
\begin{aligned}
g_7(x) &= \frac{f_7(x) - f_7(-\frac{1}{3})}{x + \frac{1}{3}} \\
&= \frac{x^7 + \left(\frac{1}{3}\right)^7}{x + \frac{1}{3}} \\
&= x^6 - \left(\frac{1}{3}\right)x^5 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 x^4 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 x^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^5 x + \left(\frac{1}{3}\right)^6
\end{aligned}
$$

Y procediendo de manera similar a los ejemplos anteriores, se llega a:

$$
\begin{aligned}
y &= g_7\left(-\frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \\
&= 7\left(\frac{1}{3}\right)^6 \left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Que corresponde a la tangente a $f_7 f_7$ en el punto $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$. (véase Figura 3).

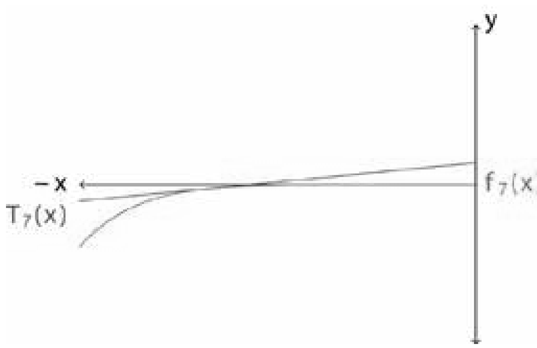

Figura 3. $f_7(x)f_7(x)$ y la recta tangente en el punto $\left(\frac{-1}{3}, f\left(\frac{-1}{3}\right)\right)\left(\frac{-1}{3}, f\left(\frac{-1}{3}\right)\right)$

Estos resultados no son mágicos, ya que el algoritmo de la división, que generaliza de forma natural los cálculos anteriores, permite demostrar que tales deducciones siempre derivarán en una función que da como resultado las pendientes de las rectas tangentes a un polinomio en un punto de su dominio y, por ende, permite la determinación de la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

Teorema 3. Sea $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado nn. Para todo $\beta \in \mathbb{R}$ $\beta \in \mathbb{R}$ existe un polinomio $q(x)q(x)$ tal que
$p_n(x) = (x - \beta)q(x) + p_n(\beta)$

La demostración es por inducción sobre el grado del polinomio. Para el caso $p_1(x)p_1(x)$, queda comprobado por medio de la siguiente división:

$$\begin{array}{l|l} a_1 x + a_0 & \underline{x - \beta} \\ \underline{-a_1 x + a_1\beta} & a_1 \\ a_1\beta + a_0 & \end{array}$$

De donde se sigue que
$p_1(x) = a_1 x + a_0 = a_1(x - \beta) + (a_1\beta + a_0) = (x - \beta)q(x) + p_1(\beta)$

Se supone que para un polinomio $p_k(x)p_k(x)$ de grado kk, existe $q(x)q(x)$ tal que para todo $\beta \in \mathbb{R}\beta \in \mathbb{R}$ cumple $p_k(x) = (x - \beta)q(x) + p_k(\beta)p_k(x) = (x - \beta)q(x) + p_k(\beta)$

Entonces, para $p_{k+1}(x)p_{k+1}(x)$, polinomio de grado $k + 1k + 1$ con $\beta \in \mathbb{R}\beta \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$
\begin{array}{l|l}
a_{k+1}x^{k+1} + a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0 & x-\beta \\ \cline{2-2}
-a_{k+1}x^{k+1} + a_{k+1}\beta x^k & a_{k+1}x^k \\ \cline{1-1}
(a_{k+1}\beta + a_k)x^k + p_{k-1}(x) &
\end{array}
$$

Pero $(a_{k+1}\beta + a_k)x^k + p_{k-1}(x) = a_{k+1}\beta x^k + p_k(x)$ $(a_{k+1}\beta + a_k)x^k + p_{k-1}(x) = a_{k+1}\beta x^k + p_k(x)$ es un polinomio de grado kk y, por hipótesis de inducción, existe $q(x)q(x)$ tal que:

$$a_{k+1}\beta x^k + p_k(x) = (x-\beta)q(x) + (a_{k+1}\beta^{k+1} + p_k(\beta))$$

Es decir, que:

$$
\begin{aligned}
p_{k+1}(x) &= a_{k+1}x^k(x-\beta) + (x-\beta)q(x) + (a_{k+1}\beta^{k+1} + p_k(\beta)) \\
&= (a_{k+1}x^k + q(x))(x-\beta) + (a_{k+1}\beta^{k+1} + p_k(\beta)) \\
&= (a_{k+1}x^k + q(x))(x-\beta) + p_{k+1}(\beta)
\end{aligned}
$$

No sobra enfatizar que al ser $q(x)q(x)$ una función polinómica, es continua en todos los puntos del dominio de $p_n(x)p_n(x)$, y es $q(x)q(x)$ quien nos permite calcular la pendiente de la recta tangente en el punto del dominio de $p_n(x)p_n(x)$; en efecto,

$$
\begin{aligned}
p_n(x) &= (x-\beta)q(x) + p_n(\beta) \\
p_n(x) - p_n(\beta) &= (x-\beta)q(x) \\
\frac{p_n(x) - p_n(\beta)}{x-\beta} &= q(x) = g_n(x)
\end{aligned}
$$

¿Por qué se puede estar seguro acerca de las afirmaciones sobre $q(x) = g_n(x)$ $q(x) = g_n(x)$? Es posible decir algo más acerca de $g_n(x)g_n(x)$ cuando hablamos de polinomios de la forma $f_n(x) = ax^n f_n(x) = ax^n$:

Teorema 4. Sea $f_n(x) = ax^n f_n(x) = ax^n$, con $a \in \mathbb{R}a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}n \in \mathbb{N}$. Dado $\beta \in \mathbb{R}$ $\beta \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$f_n(x) = a\left(\sum_{i=1}^{n} \beta^{i-1}x^{n-i}\right)(x-\beta) + f_n(\beta)$$

Nuevamente se hace prueba por inducción sobre nn. Para $f_1 f_1$:

$$\begin{array}{l|l} ax & x-\beta \\ \cline{2-2} -ax+a\beta & a \\ \hline a\beta & \end{array}$$

De donde se sigue que $f_1(x)=a(x-\beta)+f_1(\beta)f_1(x)=a(x-\beta)+f_1(\beta)$. Incluso, para $f_2(x)=ax^2 f_2(x)=ax^2$, se obtiene por medio del algoritmo de la división:

$$\begin{array}{l|l} ax^2 & x-\beta \\ \cline{2-2} -ax^2+a\beta x & ax+a\beta \\ \hline a\beta x & \\ -a\beta x+a\beta^2 & \\ \hline a\beta^2 & \end{array}$$

Con lo que se puede asegurar que $f_2(x)=ax^2=a(x+\beta)(x-\beta)+f_2(\beta)$ $f_2(x)=ax^2=a(x+\beta)(x-\beta)+f_2(\beta)$. Ahora, se establece la hipótesis de inducción: para $f_k(x)=ax^k f_k(x)=ax^k$, se cumple que

$$f_k(x)=a\left(\sum_{i=1}^{k}\beta^{i-1}x^{k-i}\right)(x-\beta)+f_k(\beta)$$

Así, para $f_{k+1}=ax^{k+1}f_{k+1}=ax^{k+1}$ se tiene:

$$\begin{array}{l|l} ax^{k+1} & x-\beta \\ \cline{2-2} -ax^{k+1}+a\beta x^k & ax^k \\ \hline a\beta x^k & \end{array}$$

Luego, $f_{k+1}(x)=(ax^k)(x-\beta)+a\beta x^k f_{k+1}(x)=(ax^k)(x-\beta)+a\beta x^k$; pero, utilizando la hipótesis de inducción se puede afirmar que:

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= (ax^k)(x-\beta)+\beta\left(a\left(\sum_{i=1}^{k}\beta^{i-1}x^{k-i}\right)(x-\beta)+f_k(\beta)\right) \\ &= \left(\beta a\left(\sum_{i=1}^{k}\beta^{i-1}x^{k-i}\right)+ax^k\right)(x-\beta)+\beta f_k(\beta) \\ &= a\left(\left(\sum_{i=1}^{k}\beta^{i}x^{k-i}\right)+x^k\right)(x-\beta)+f_{k+1}(\beta) \\ &= a(x^k+\beta^1x^{k-1}+\beta^2x^{k-2}+\cdots+\beta^k)(x-\beta)+f_{k+1}(\beta) \\ &= a\left(\sum_{i=0}^{k}\beta^{i}x^{k-i}\right)(x-\beta)+f_{k+1}(\beta) \\ &= a\left(\sum_{i=1}^{k+1}\beta^{i-1}x^{(k+1)-i}\right)(x-\beta)+f_{k+1}(\beta) \end{aligned}$$

Corolario 1. Dado el polinomio $f_n(x) = ax^n f_n(x) = ax^n$ la función de pendientes de rectas tangentes a $f_n(x) f_n(x)$ en el punto $(\beta, f_n(\beta))(\beta, f_n(\beta))$ está dada por $g_n(\beta) = an\beta^{n-1}$ $g_n(\beta) = an\beta^{n-1}$, para todo $\beta, a \in \mathbb{R}\beta, a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}n \in \mathbb{N}$.

En efecto, utilizando el teorema 3, tenemos que:

$$f_n(x) = a\left(\sum_{i=1}^{n} \beta^{i-1} x^{n-i}\right)(x-\beta) + f_n(\beta)$$

De donde se sigue que

$$g_n(x) = a\left(\sum_{i=1}^{n} \beta^{i-1} x^{n-i}\right)$$

Por lo tanto,

$$g_n(\beta) = an\beta^{n-1}$$

Nótese la similitud del resultado del anterior corolario con los obtenidos por medio del uso de derivadas.

La anterior demostración está incompleta, en tanto que no se ha demostrado que, efectivamente, el resultado anterior corresponde a la pendiente de la recta tangente a $f_n(x) f_n(x)$, así que aún sigue sin responderse completamente la pregunta ¿por qué se puede estar seguros de $g_n(x) g_n(x)$ como función de pendientes de rectas tangentes? De otro lado, los razonamientos anteriores ha estado sujetos a polinomios, es decir se ha estado hablando de $p_n p_n$ y $f_n f_n$ donde $n \in \mathbb{N}n \in \mathbb{N}$, pero, ¿qué sucede si $n \in \mathbb{Q}n \in \mathbb{Q}$? La siguiente definición permite dar ese faltante:

Definición 1. *Derivada a la Caratheodory.* Una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\beta \in \mathbb{R}\beta \in \mathbb{R}$, si existe $q(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R} q(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua en $\beta\beta$ y tal que

$$f(x) - f(\beta) = q(x)(x-\beta) f(x) - f(\beta) = q(x)(x-\beta) \qquad (1)$$

El valor de $q(\beta) q(\beta)$, (si $q(x) q(x)$ existe), es la derivada de ff en $\beta\beta$.

En la Figura 4, vemos la interpretación geométrica de la definición dada por Caratheodory.

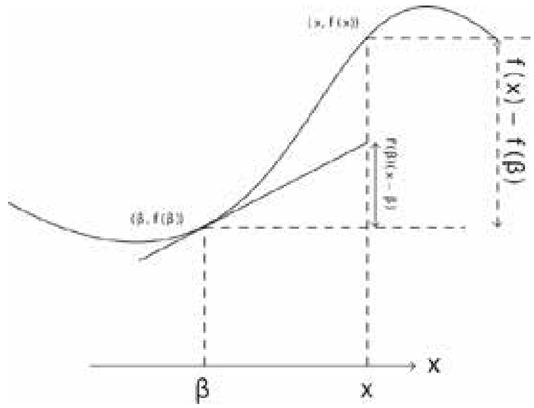

Figura 4. Interpretación geométrica derivada de Caratheodory

La definición 1 es equivalente con la definición de derivada de Cauchy:

$$\lim_{x \to \beta} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta}$$

En efecto, si $f'(\beta)f'(\beta)$ existe, se define $q(x)q(x)$ como sigue:

$$q(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} & \text{si } x \neq \beta \\ f'(\beta) & \text{si } x = \beta \end{cases}$$

Así $q(x)q(x)$ es continua en $\beta\beta$ y la Ecuación 1 se verifica para todo elemento del dominio de ff.

Recíprocamente, si la expresión (1) se verifica para cierta función $q(x)q(x)$ continua en $\beta\beta$, entonces dividiendo por $x - \beta x - \beta$ y haciendo $x \to \beta x \to \beta$, vemos que $f'(\beta)$ $f'(\beta)$ existe y es igual a $q(\beta)q(\beta)$. Si en la expresión 1 hacemos $x \to cx \to c$, queda demostrado el siguiente:

Teorema 5. Si ff es diferenciable en $\beta\beta$, entonces es continua en $\beta\beta$.

Pero entonces, ¿cómo ayuda la definición 1 con el problema de la tangente para f_nf_n cuando $n \in \mathbf{Q}n \in \mathbf{Q}$? Por ejemplo, para calcular la pendiente de la recta tangente a la función $f_{1/3}(x) = \sqrt[3]{x}f_{1/3}(x) = \sqrt[3]{x}$ en el punto $(\beta, f_{1/3}(\beta))(\beta, f_{1/3}(\beta))$. Nuevamente se recurre al teorema del binomio de Newton (productos notables):

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\beta} &= (\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\beta})\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}}\right)\\ &= \left(\frac{x-\beta}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}}\right)\end{aligned}$$

De donde se puede asegurar que:

$$q(x)=g_{1/3}(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}}$$

Por tanto,

$$g_{1/3}(\beta)=\frac{1}{3\sqrt[3]{\beta^2}}$$

Que coincide con el resultado obtenido con la definición derivada dada por Cauchy; pero,

¿qué pasa cuando $n \in \mathbb{R} n \in \mathbb{R}$, cómo se factoriza en ese caso?

Caratheodory en Geogebra

El software de geometría dinámico Geogebra constituye una herramienta poderosa en la visualización de los resultados obtenidos por medio de la definición de derivada dada por Caratheodory. Se propone la siguiente construcción para la visualización de las tangentes

a la curva de la función $f_{1/3}(x)=\sqrt[3]{x} f_{1/3}(x)=\sqrt[3]{x}$:

1. Se dibuja la función $f(x)=\sqrt[3]{x} f(x)=\sqrt[3]{x}$.

2. Se escribe la función $g(x)=\frac{1}{3x^{2/3}} g(x)=\frac{1}{3x^{2/3}}$, pero se oculta la gráfica.

3. Se crea un deslizador, que en este caso se llamará aa, cuyo valor mínimo sea $-5-5$ y el valor máximo sea 55, y el avance de $0.10.1$. Estos valores pueden cambiarse, siempre que se escoja un intervalo que pertenezca al dominio de $f(x)f(x)$. Este deslizador permitirá animar la construcción.

4. Se procede entonces a construir la recta, teniendo presente que se interpretó la función $g(x)g(x)$ como función de pendientes, y los puntos estarán dados por el deslizador aa, con lo cual se podrá animar la construcción. Es así que se ingresa la expresión $y=g(a)(x-a)+f(a)$

5. Con lo que aparecerá la gráfica de la recta tangente a $f(x)f(x)$ en el punto dado por el deslizador.

En la Figura 5 se muestra el resultado.

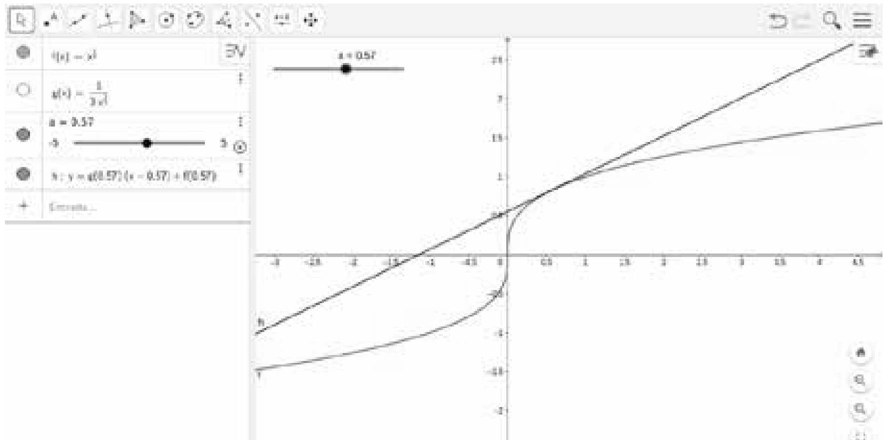

Figura 5. Visualización en Geogebra

Esta construcción tiene la ventaja que, al animar el deslizador, se visualizan las tangentes a $f(x)f(x)$ en los puntos dados por este; es importante establecer la comparación con aquellas construcciones en las que se trata de emular la definición de derivadas utilizando límites apoyándose en la construcción de una secante que pase por dos puntos de la función, y que luego acercando dichos puntos requiere de los estudiantes un acto de fe para creer que esa aproximación continua deriva en la tangente a la función.

El problema de la tangente: antes de derivada a la Caratheodory

Es un grupo de grado undécimo, del énfasis en ingeniería y TIC de la institución educativa en la que imparto clases. El tema central: estudio de las características de la familia de funciones polinómicas.

Se han consolidado algunos resultados importantes:

a. Polinomios de la forma $f(x) = mx + bf(x) = mx + b$:

   i. La gráfica siempre es una línea recta, con pendiente mm y con corte en el eje vertical en el punto $(0, b)(0, b)$.

   ii. Cuando la recta es horizontal, no presenta cortes con el eje horizontal, a menos que se encuentre sobre el eje horizontal.

   iii. Cuando la recta es vertical, no presenta cortes con el eje vertical, a menos que se encuentre sobre el eje vertical.

   iv. La única situación en la que la recta presenta corte con los dos ejes, es que sea oblicua (no perpendicular a ninguno de los ejes).

b. Polinomios de la forma $g(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0g(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$:

i. Su gráfica es una parábola.

ii. Si $a > 0a > 0$, la parábola *abre hacia arriba*, es decir, tiene forma de U.

iii. Si $a < 0a < 0$, la parábola *abre hacia abajo*, es decir, tiene forma de U invertida.

iv. El vértice de la parábola tiene como coordenadas $\left(\frac{-b}{2a}, g\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)\left(\frac{-b}{2a}, g\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.

v. Si $a > 0a > 0$, el vértice es el punto máximo de la parábola; si $a < 0a < 0$, el vértice es el punto mínimo de la parábola.

¿Qué tipo de relación se puede establecer entre una parábola y una recta, asumiendo que se dibujaron en el mismo plano cartesiano? Debido a que la clase no tiene como uno de sus objetivos el que los estudiantes demuestren formalmente todas sus afirmaciones, se consideran las construcciones en software de geometría dinámica como un método de validación de las afirmaciones de tipo matemático.

Es así que, los estudiantes llegan al acuerdo que entre una recta y una parábola sucede una, y solo una, de las siguientes situaciones:

a. No tienen puntos en común.

b. Tienen exactamente un punto en común (la recta es tangente a la parábola).

c. Tienen exactamente dos puntos en común.

Con estas herramientas, inicia el proceso de preguntas orientadoras hacia el problema propuesto como central en este escrito; dichas preguntas requieren que se establezcan ciertos términos y sus definiciones. Algunos de ellos son: tangente, intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento, puntos críticos, entre otros. Luego, se propone a los estudiantes ciertas preguntas, desde las cuales se espera establecer relaciones entre los polinomios de primer y segundo grado. Entre otras:

a. ¿Cómo determinar la ecuación, o la gráfica, de una recta tangente a una parábola en un punto de la misma?

b. ¿Qué característica tiene una recta que es tangente a una parábola en su vértice?

Con respecto a la segunda pregunta, luego de varios bosquejos en el cuaderno y trabajo con el software Geogebra, aprovechando herramientas como *"punto de intersección"*, surge la primera conjetura:

- *Vea profesor, si dibujamos la parábola $g(x) = x^2 g(x) = x^2$, mire que el eje horizontal es tangente en el vértice. Lo mismo sucede con la parábola $g(x) = -x^2 g(x) = -x^2$,* sostienen ellos apoyados en las gráficas obtenidas en Geogebra.

La propuesta de los estudiantes merece darle una oportunidad, por lo que entre todos se buscó verificar (se insiste, no es uno de los objetivos de la clase el realizar demostraciones formales) que sucede lo mismo cuando la parábola no tiene el vértice sobre el eje horizontal.

Les es sencillo dar ejemplos de funciones cuyo gráfico sea una parábola, y con algunos ajustes orientados por los cambios que se observan en la gráfica cuando se modifican los parámetros $a, b\ y\ c a, b\ y\ c$ en la expresión $ax^2 + bx + cax^2 + bx + c$, se llega a una parábola cuyo vértice no está sobre el eje horizontal.

La herramienta "*puntos especiales*" ubica e indica las coordenadas del vértice, de manera que con la ayuda de la herramienta "*recta paralela*", haciendo clic sobre el eje horizontal y luego sobre el vértice, Geogebra muestra una recta con las características solicitadas. La herramienta "*Punto de intersección*" da la puntada final: ¡solo el vértice es el punto de intersección! La conjetura queda establecida como relación entre una recta y una parábola:

La recta que es tangente a una parábola en su vértice, es horizontal

¿Y la respuesta a la primera pregunta? Eso se desarrollará en el transcurso del año. La demostración de esta conjetura puede hacerse utilizando los conocimientos que hasta el momento tienen los estudiantes, es decir, sin el uso del concepto de derivada.

En efecto, sea la función $f(x) = ax^2 + bx + cf(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0a \neq 0$ El vértice de la función tiene como coordenadas $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2}{4a} + c\right)\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2}{4a} + c\right)$. Sea $g(x) = m\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{b^2}{4a} + cg(x) = m\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{b^2}{4a} + c$ una recta tangente a $f(x)f(x)$ en su vértice. Supongamos que $m \neq 0m \neq 0$, y se plantea la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = m\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$ax^2 + bx + c = mx + \frac{bm}{2a} - \frac{b^2}{4a} + c$$

Agrupando términos semejantes,

$$ax^2 + x(b - m) + \left(-\frac{bm}{2a} + \frac{b^2}{4a}\right) = 0$$

Se calcula el discriminante:

$$\Delta = (b - m)^2 - 4a\left(-\frac{bm}{2a} + \frac{b^2}{4a}\right)$$

$$\Delta = b^2 - 2bm + m^2 + 2bm - b^2$$
$$\Delta = m^2$$

Bajo la hipótesis de que mm es diferente de cero, se ha demostrado que la recta tangente y la parábola tienen dos puntos diferentes en común, lo cual es contradictorio. Por lo tanto, debe ser $m = 0m = 0$, es decir, la recta es horizontal.

Se asigna como ejercicio para la casa, la siguiente función:

$$p(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

La actividad: determine rangos en los cuales la función es creciente, y rangos en donde es decreciente. Además, los cortes con el eje horizontal y, si es posible, los cortes con el eje vertical.

En la siguiente clase obtengo, entre otros comentarios, los siguientes: *la factorización permite asegurar que el polinomio tiene corte en el eje x en los puntos* $(3{,}0)$, $(2{,}0)(3{,}0)$, $(2{,}0)$ *y* $(1{,}0)(1{,}0)$. *Estos tres cortes con el eje horizontal sugieren que la gráfica de la función presenta un punto máximo y un punto mínimo en el intervalo* $(1{,}3)(1{,}3)$. Los estudiantes, a partir de dicha información, y calculando algunos de los valores de la función en dicho intervalo, determinan rangos aproximados en donde la función es creciente y decreciente.
Sin embargo, insisten en que requieren determinar las coordenadas de los valores máximo y mínimo de la función en mencionado intervalo.

Es así que, se apoyan en el software Geogebra para obtener una representación gráfica de la función, y con ello les es posible establecer valores aproximados de los llamados valores críticos del polinomio, y así delimitar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Pero, las coordenadas que da el programa para los puntos máximos y mínimos son aproximadas, y no lo consideran como una respuesta satisfactoria a la determinación de las coordenadas de estos puntos críticos.

¿Cómo se determinan las coordenadas de los puntos máximos y mínimos de una función polinómica en el intervalo en el que se encuentran todos los puntos de corte con el eje horizontal? Si se considera la gráfica de la función entre dos cortes con el eje horizontal, la forma de la gráfica parece una parábola, y se podría obtener las coordenadas de los puntos críticos si se contara con una expresión algebraica para esa parábola, ¿cómo podemos obtener la ecuación para ese trozo de función que parece parábola?

La formulación de estas preguntas generan preocupación al docente: al momento de escribir estas notas, aún no se ha iniciado el tema de derivada de Caratheodory, por lo que la respuesta no puede hacer uso de la interpretación geométrica de la derivada, ni sus métodos. Sonríen triunfantes, se felicitan entre ellos, alabanzas hay hacia el estudiante que insistió en la formulación de la duda y tratan de aliviar la angustia del docente con la frase: *tranquilo profe, ¡uno no se las sabe todas!*

Luego de cavilar un poco, se comparte con ellos el siguiente razonamiento que leí en las excelentes notas del profesor Dovermann (1999):

es posible expresar un polinomio como una suma de términos de la forma $(x-\beta)^n$

$(x-\beta)^n$, en donde $\beta \in \mathbb{R}\beta \in \mathbb{R}$, y esto puede hacerse por medio de manipulaciones elementales. En efecto, el polinomio de estudio, al realizar las multiplicaciones indicadas, queda como:

$$(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Y se requiere una reescritura del mismo en términos de $(x-\beta)^n(x-\beta)^n$, con $\beta = 4$ $\beta = 4$, con lo que es necesario considerar la siguiente igualdad:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = a_3(x-4)^3 + a_2(x-4)^2 + a_1(x-4) + a_0$$

Realizando los cálculos indicados en el término derecho de la anterior igualdad, se obtiene:

$$\begin{gathered} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\ = a_3x^3 + (\mathrm{a}_2 - 12a_3)x^2 + (48a_3 - 8\mathrm{a}_2 + a_1)x + (-64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + a_0) \end{gathered}$$

Igualando términos, desde acá es sencillo seguir: $a_3 = 1a_3 = 1$, por lo tanto,

$$\begin{gathered} a_2 - 12a_3 = -6 \\ a_2 - 12 = -6 \\ a_2 = 6 \end{gathered}$$

Igualando los coeficientes para xx, se sigue

$$\begin{gathered} 48a_3 - 8\mathrm{a}_2 + a_1 = 11 \\ 48 - 48 + a_1 = 11 \\ a_1 = 11 \end{gathered}$$

Y, finalmente,

$$\begin{gathered} -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + a_0 = -6 \\ -64 + 96 - 44 + a_0 = -6 \\ a_0 = 6 \end{gathered}$$

Es decir, se demostró la igualdad:

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-4)^3 + 6(x-4)^2 + 11(x-4) + 6$

Ahora, se considera el término lineal de la expresión al lado derecho de la igualdad, es decir, $g(x) = 11(x-4) + 6g(x) = 11(x-4) + 6$. ¿Qué relación puede establecerse entre g$(x)(x)$ y el polinomio en estudio? Las gráficas de dichas funciones se muestran en la Figura 6.

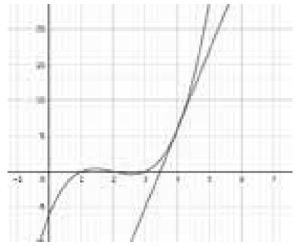

Figura 6. La función *g(x)* es tangente al polinomio

¿Por qué el término lineal corresponde a la tangente a la función en el punto cuya abcisa es 4? Se propone la siguiente justificación: considérese la reescritura de los siguientes polinomios en términos de $(x-\beta)(x-\beta)$, con $\beta \in \mathbb{R}\beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a_1 x \\ &= a_1(x-\beta) + a_1\beta \end{aligned}$$

De igual manera, para un polinomio de grado 22:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= a_2 x^2 \\ &= a_2(x-\beta)^2 + 2a_2\beta(x-\beta) + a_2\beta^2 \end{aligned}$$

Un ejemplo más:

$$\begin{aligned} f_3(x) &= a_3 x^3 \\ &= a_3(x-\beta)^3 + 3a_3\beta(x-\beta)^2 + 3a_3\beta(x-\beta) + a_3\beta^3 \end{aligned}$$

Nótese la relación entre los exponentes de $\beta\beta$, de $(x-\beta)(x-\beta)$ y los valores numéricos de los coeficientes en cada uno de los términos: son similares a los obtenidos con la expansión del teorema del binomio de Newton. Entonces se asegura que:

$$f_n(x) = a_n x^{\mathrm{n}} = a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta^k (x-\beta)^{n-k}$$

Por lo tanto, haciendo los cambios adecuados de escritura, el polinomio $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$ $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$ se puede reescribir como:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[(x-\beta)^i \left\{\sum_{k=0}^{n-i} \binom{k+i}{k} a_{k+i}\beta^k\right\}\right] + p_n(\beta) p_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[(x-\beta)^i \left\{\sum_{k=0}^{n-i} \binom{k+i}{k} a_{k+i}\beta^k\right\}\right] + p_n(\beta)$$

(2)

De esta reescritura, se extrae el término lineal, es decir:

$$y=(x-\beta)\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k+1}{k}a_{k+1}\beta^k\right\}+f_n(\beta)y=(x-\beta)\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k+1}{k}a_{k+1}\beta^k\right\}+f_n(\beta)$$
(3)

¿Reconoce el lector esta expresión? ¡Exacto! Corresponde a la ecuación de una recta, en donde la pendiente se calcula por medio del término

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k+1}{k}a_{k+1}\beta^k$$

Que, teniendo en cuenta los resultados aprendidos en cálculo diferencial, corresponde a $p'(\beta)p'(\beta)$.

Por ejemplo, si se tiene el polinomio $p_2(x)=2x^2+3x-5p_2(x)=2x^2+3x-5$, y se utiliza la expresión 2 con $\beta=-3\beta=-3$, se obtiene:

$$p_2(x)=2x^2+3x-5=2(x+3)^2-9(x+3)+4p_2(x)=2x^2+3x-5=2(x+3)^2-9(x+3)+4$$
(4)

Tomando la parte lineal del término a la derecha en la expresión 4, queda la función $t(x)=-9(x+3)+4t(x)=-9(x+3)+4$. En la Figura 6, se muestran los gráficos de $p_2(x)p_2(x)$ y $t(x)t(x)$.

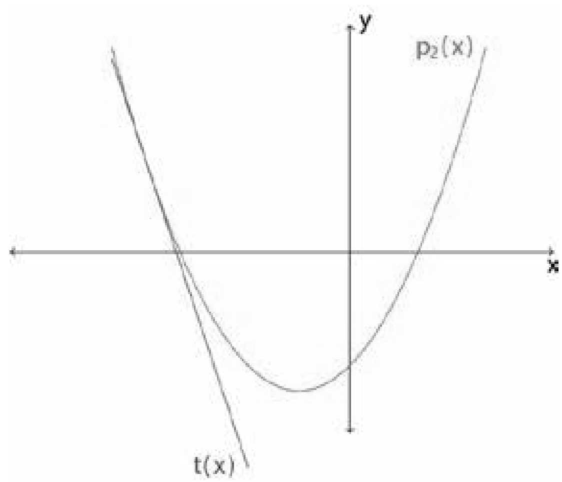

Figura 7. $t(x)t(x)$ corresponde a la tangente a $p_2(x)p_2(x)$ en $(-3,p_2(-3))(-3,p_2(-3))$

Ahora, volviendo al polinomio

$$(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Y a la pregunta hecha por los estudiantes, ¿Cómo ayuda la expresión 3 a determinar las coordenadas de dichos puntos?

Apoyándose en el hecho que la recta tangente en los puntos críticos debe ser horizontal, la pendiente de la misma debe ser cero, por lo que la expresión para la tangente se iguala a cero. Las soluciones de dicha ecuación corresponderían a las abcisas de los puntos críticos.

Entonces,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+1}{k} a_{k+1} \beta^k = 0$$

Desarrollando la sumatoria,

$$1 + 2(-6)\beta + 3(1)\beta^2 = 0$$
$$1 - 12\beta + 3\beta^2 = 0$$

Utilizando la fórmula cuadrática, se obtienen las abcisas de los puntos críticos, a saber:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{33}}{3}$$

Este resultado permite obtener las abcisas de los puntos críticos de una función polinómica.

Conclusiones

La pendiente de una recta es un concepto que resulta particularmente útil para la solución de muchos de los problemas que han sido motivo de estudio desde los mismos inicios de la matemática, entre ellos: ¿cómo determinar la velocidad instantánea de una partícula en movimiento?, ¿cómo dibujar, determinar la ecuación, de la recta tangente a una curva en un punto dado?, dada una función, ¿cómo determinar sus valores máximos y mínimos?, ¿cómo optimizar el uso de materiales limitados, los ingresos, los costos, las ganancias?, entre otros.

A partir de la definición de pendiente de una recta, fue posible explorar y demostrar algunas propiedades de los polinomios y obtener resultados, con los cuales no solo se estableció un algoritmo para determinar la ecuación de la recta tangente en un punto del dominio de la función polinómica, sino que además, junto con la formulación de derivada de Caratheodory, este algoritmo pudo extenderse a funciones de la forma $f_n(x) = ax^n f_n(x) = ax^n$ con $n \in \mathbb{Q} n \in \mathbb{Q}$ y $a \in \mathbb{R} a \in \mathbb{R}$, sin necesidad de recurrir a conceptos como el de límite.

La formulación de derivada de Caratheodory permite demostrar los ya conocidos teoremas del álgebra de derivadas, es decir, para calcular derivadas de suma, resta, multiplicación, división y composición de funciones (Acosta *et al.*, 1992); así, los resultados obtenidos en este escrito se pueden aplicar a las funciones resultantes de las combinaciones, por medio de estas cinco operaciones, de los polinomios y funciones de la forma $f_n(x) = ax^n$ $f_n(x) = ax^n$ con $n \in \mathbb{Q} n \in \mathbb{Q}$ y $a \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$, dando un amplio rango de utilidad de los razonamientos seguidos aquí.

En mi práctica docente, he podido verificar que estas propuestas derivan en cambios significativos en la actitud de los estudiantes hacia el trabajo matemático, evidenciado esto, por ejemplo, en que el interés al atacar un problema o ejercicio no se reduce a la mera aplicación de una fórmula o la repetición de un algoritmo para dar una respuesta, sino que surge la preocupación por verificar y justificar sus resultados utilizando diversos sistemas de representación. Adicional a esto, reconocen ellos la importancia de preguntar, y buscar soluciones a dichas preguntas, como mecanismo importante en la obtención de nuevos puntos de vista, incluso en problemas no tan nuevos; de adquirir nuevos conocimientos y de utilizar de manera creativa los conocimientos adquiridos, siendo un espacio para discutir soluciones, proponer alternativas, justificar sus posiciones, redundando todo ello en el fortalecimiento de habilidades y desempeños.

Queda entonces abierta la discusión alrededor de esta propuesta, como ejemplo de un micro-mundo controlado de trabajo matemático, en donde se exploran soluciones a un problema importante en las matemáticas, pero haciendo uso de conceptos no tan complejos, como el de límite, y manipulaciones algebraicas elementales que, si bien inicialmente se limitaban a una familia particular (y por qué no, muy reducida) de funciones, los resultados son aplicables a un número importante de funciones analíticas.

Finalmente, es necesario colocar sobre la mesa la discusión acerca del dominio conceptual que se requiere del docente de matemáticas: la definición de derivada a la Caratheodory puede encontrarse en documentos como Acosta *et al.* (1992), Cañizo (2004), Gómez *et al.* (s.f.), Kuhn (1991), Pinzón *et al.* (1999) y Vargas *et al.* (2009), de hecho, la propuesta del profesor Dovermann (1999) es para un curso universitario de cálculo. Existe literatura en la que se puede encontrar otras alternativas para abordar los conceptos del cálculo, excelentes textos como Apostol (1965), y no menos importantes propuestas como Luque (1993), esta última en la que el autor muestra cómo obtener derivadas de las funciones, incluyendo funciones trigonométricas y exponenciales, en el conjunto de los números duales sin requerir del concepto de límite, y no se olvide el método desarrollado por Arquímedes para determinar la recta tangente a una parábola.

Aunque son textos especializados, y destinados a un nivel diferente al de bachillerato, sugiero el tener en cuenta textos no elementales como base para el desarrollo de propuestas didácticas y curriculares que aporten nuevos elementos a la clase de matemáticas, e incluso investigar si de esta manera se logra una articulación armónica entre el colegio y la universidad.

La transposición o adecuación de estos tópicos presentes en textos no elementales a las clases con nuestros estudiantes, puede resultar en propuestas alternativas que realmente aporten nuevas visiones a futuras investigaciones acerca de la enseñanza de los tópicos de las matemáticas escolares. No debe ignorarse la discordancia entre los objetivos y propósitos de la educación elemental con los de la educación superior. Si bien se insistió en que no se requiere de los estudiantes el desarrollo de demostraciones formales, el establecimiento, justificación, admisión o descarte de conjeturas, son competencias importantes y necesarias en el estudio de las matemáticas, que es obvio no pueden ser sustentadas en el vacío, sino bajo conocimientos específicos del área, lo cual se espera de un estudiante que aspira ingresar a la educación superior.

Conozco dos formas de proveer estos conocimientos específicos: la primera, es entregar la receta a los estudiantes y procurar verificar que la *aprendieron* asignando muchos ejercicios repetitivos; la segunda, es orientar los esfuerzos a despertar el interés por el área. El llevar esta propuesta a mi aula de clases, me ha convencido de que a los estudiantes les apasiona el reto de superar algo que le causa dificultad, el hallar la solución a algo propuesto, no importa que no haga parte necesariamente de las situaciones asociadas a su entorno inmediato.

Al final de cuentas, la escuela es un micro-mundo en donde tenemos el poder y la oportunidad de presentar a nuestros estudiantes, aspectos que despierten u orienten su interés a cosas que ellos no conocen. La frase: "*hay que trabajar lo que a ellos les llame la atención y les guste*" puede ser un poco paradójica: si es poco lo que conocen, ¿cómo sabrán qué es lo que realmente les llama la atención o les gusta?

Es decir, ¿cómo saben si les gustará este platillo si nunca lo han probado? ¿Esperaremos a que lea sobre un tema que le interese, aun cuando somos conscientes de que muy posiblemente no ha desarrollado interés por la lectura?

La relación constante del docente con el conocimiento específico del área que orienta garantizará que siempre tenga un platillo nuevo que ofrecer a sus estudiantes, que tenga opciones bajo las cuales él pueda decidir qué le parece interesante, qué le gusta, en qué puede dedicarse el resto de su vida académica y laboral.

Es así que, la conclusión central que aporto a la discusión es:

Es posible que nuestros estudiantes no vean lo hermoso de las matemáticas sencillamente porque no se las dejamos ver, o porque no se las presentamos para que las vean.

Referencias

Acosta, E., Delgado, C., y Rodríguez, C. (1992). La Derivada de Caratheodory. *Matemáticas Enseñanza Universitaria*, *2* (2), 31 - 38.

Apostol, T. (1965). *Calculus*. Nueva York, Estados Unidos. Editorial Reverté, S.A.

Cañizo, J. (2004). *Ecuaciones diferenciales ordinarias en el sentido de Caratheodory*. Recuperado de http://www.mat.uab.cat/canizo/tex/

Dovermann, K. (1999). *Applied Calculus*. Hawai, Estados Unidos. Universidad de Hawaii.

Gómez, J. y Vásquez, R. (s.f.). *Sobre un concepto de derivada (a la Caratheodory) sin el formalismo epsilón – delta de Cauchy*. Recuperado de http://intermat.fciencias.unam.mx/derivada2.pdf.

Knorr, W. (1993). *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. Boston, Estados Unidos. Dover Publications INC.

Kuhn, S. (1991). The Derivative a La Caratheodory. *American Mathematical Monthly*, *98* (1), 40 - 44.

Luque, C. (1993). *El Cálculo: Una Versión Sin El Concepto de Límite*. Bogotá, Colombia. Universidad Pedagógica Nacional.

Ministerio de Educación Nacional MEN (1998). *Matemáticas, lineamientos curriculares*. Cooperativa Editorial Magisterio.

Pinzón, S. y Paredes, M. (1999). La derivada de Caratheodory en R2. *Revista INTEGRACIÓN*, *17* (2), 65-98.

Vargas, A., Torres, M., y Quintero, N. (2009). *La derivada a la Caratheodory, una nueva concepción en el aprendizaje y la enseñanza del cálculo*. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/720/1/laderivada.pdf