

Artículo de Investigación

Recepción: 6 de junio de 2018

Aprobación: 30 de octubre de 2018

LA COMPRENSIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO PARÁBOLA A TRAVÉS DE LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

THE UNDERSTANDING OF THE MATHEMATICAL
PARABLE OBJECT THROUGH THE SEMIOTIC
REPRESENTATIONS

Luis Eduardo Sánchez Espinel

Licenciado en Matemáticas

Colegio La Presentación.

(Tunja, Colombia)

luchoeduard29@hotmail.com

RESUMEN

Basado en la teoría las representaciones semióticas de Duval (1999), se presentan resultados parciales sobre el uso de las representaciones semióticas en la comprensión del objeto matemático parábola. Para esto, se plantearon estrategias de enseñanza para estudiantes de grado décimo, encaminadas al trabajo en los registros gráfico, verbal, algebraico, y sus transformaciones, conversión y tratamiento; permitiéndoles así el estudio, reconocimiento, interpretación e interiorización de este objeto; además, se resalta la importancia que tiene el tratamiento y la conversión en la comprensión del objeto matemático parábola.

Palabras clave: representaciones semióticas, registros, tratamiento, conversión, parábola.

ABSTRACT

Based on the theory of the semiotic representations of Duval (1999), partial results are presented on the use of semiotic representations in the understanding of the mathematical object parabola, for this teaching strategies were proposed for tenth grade students aimed at work in the registers graphic, verbal, algebraic, and its transformations, conversion and treatment; allowing them to study, recognize, interpret and internalize this object, in addition, the importance of the treatment and conversion in the understanding of the parabola mathematical object is highlighted.

Keywords: semiotic representations, records, treatment, conversion and parable.

INTRODUCCIÓN

El Ministerio de Educación Nacional (MEN), a través de los estándares básicos de competencias, plantea subprocesos que el estudiante debe cumplir para alcanzar el desarrollo de los pensamientos matemáticos, los cuales contribuyen eficazmente a lograr grandes metas y propósitos de la educación; por tanto, la educación matemática debe estar enfocada a responder demandas globales y nacionales por su relación con el desarrollo de las capacidades de razonamiento lógico, por el ejercicio de la abstracción, el rigor y la precisión, y por su aporte al desarrollo de la ciencia (MEN, 2006).

Según el MEN (2006), los estudiantes en el grado décimo deben construir, expresar, declarar y representar ideas matemáticas, analizar la relación entre las expresiones algebraicas y gráficas de funciones, reconocer y describir curvas obtenidas por cortes longitudinales y transversales en un cono y en un cilindro, pero al observar e identificar las dificultades que presentan los estudiantes de grado décimo en el estudio de estas curvas, especialmente en aprendizaje de la parábola, fue necesario hacer uso de la teoría de las representaciones semióticas en la enseñanza de este objeto matemático parábola.

Ante las dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión y aprendizaje del objeto matemático parábola, es importante generar situaciones de enseñanza que les permita a los estudiantes construir, expresar y representar de forma gráfica,

verbal y algebraica conocimientos sobre este objeto; por ende, para el estudio de la parábola es fundamental incluir la teoría de las representaciones semióticas, ya que este objeto es intangible para los estudiantes; por consiguiente, es necesario recurrir a las diferentes representaciones para su comprensión. Al utilizar las diversas representaciones semióticas en el aprendizaje de la parábola, posiblemente les permitirá a los estudiantes construir sistemas de expresión, representación y comunicación de conocimiento matemático, incluyendo diferentes formas de escritura, notación y representación (Tamayo, 2006).

PROBLEMA INVESTIGADO

En el contexto colombiano, bajo las directrices del Ministerio de Educación Nacional (MEN), se establecen Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) y Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), los cuales se constituyen en parámetros para determinar lo que los estudiantes deben saber y hacer en las diferentes áreas y grados; así como también estipulan perspectivas metodológicas, procesos y contextos que deben privilegiarse en la enseñanza. En el área de matemática, estas directrices contemplan diversos procesos generales (comunicar, razonar, formular, comparar, modelar fenómenos de la realidad, resolver problemas y ejercitar procedimientos y algoritmos) y tipos de pensamiento matemático (numérico, espacial, métrico o de medida, aleatorio o probabilístico y variacional) encaminados a fortalecer el desarrollo de competencias matemáticas.

Ser matemáticamente competente implica, desde estos lineamientos, ser activo, eficiente, diestro y hábil en el desarrollo de cada uno de los procesos, en los cuales los estudiantes van pasando por diferentes niveles de competencia; a medida que los estudiantes van ascendiendo en la Educación Básica y Media, van desarrollando procesos de mayor complejidad y tendrán la capacidad de afrontar situaciones de mayor nivel de abstracción, es por esto que en los estándares se establecen niveles de competencia para cada uno de los tipos de pensamiento matemático y para cada conjunto de grados (primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a undécimo).

Los estudiantes en el grado décimo a undécimo deben utilizar diferentes registros de representación para construir, expresar, declarar y representar ideas matemáticas; es decir, deben estar en la capacidad de dominar las distintas representaciones empleadas en el lenguaje matemático; además, los estudiantes deben identificar de forma visual, gráfica y algebraica las relaciones entre los cambios de registros de lugares geométricos, analizar la relación entre las expresiones algebraicas y gráficas de funciones, reconocer y describir curvas obtenidas por cortes longitudinales y transversales en un cono y en un cilindro (MEN, 2006).

No obstante, la realidad que se evidencia en el aula parece distanciarse de lo planteado en los estándares básicos de competencia; por ejemplo, los estudiantes presentan dificultades en la comprensión de lugares geométricos,

tal es el caso para el objeto matemático parábola, el desempeño de los estudiantes se centra en el desarrollo de procesos algorítmicos y mecánicos; esta problemática radica en la falta de interpretación y comprensión de este objeto. Mesa, Aldana y Alonso (2013) afirman:

[...] los estudiantes no reconocen la parábola a partir de sus componentes y por tanto no hay relación analítica de la ecuación con los elementos que la conforman, es decir, no logran integrar la razón que existe entre el vértice, la directriz y el foco, confunden la simetría con el eje focal y la orientación del objeto; tienen dificultad para utilizar los sistemas de representación que facilitan la interpretación de la parábola; porque no asocian la ecuación con la gráfica, ni establecen una relación tabular con su gráfica (p. 75).

De igual forma, lo observado en la práctica pedagógica de la enseñanza del objeto matemático parábola, a los estudiantes se les dificulta reconocer la ecuación de la parábola, escribir la ecuación canónica, graficar una parábola a partir de su ecuación, resolver problemas de aplicación y describir los elementos de la parábola a partir de su ecuación y su gráfica. Bajo los argumentos expuestos, cabe preguntarse, ¿cómo las diversas representaciones semióticas privilegian la comprensión del objeto matemático parábola? Para dar respuesta a esta pregunta, se planteó como objetivo general establecer niveles de comprensión del objeto matemático parábola a través del análisis de representaciones semióticas.

“Ser matemáticamente competente implica, desde estos lineamientos, ser activo, eficiente, diestro y hábil en el desarrollo de cada uno de los procesos”.

LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

En el área de las matemáticas, aparecen las representaciones semióticas en trabajos sobre la adquisición de los conocimientos matemáticos y sobre los problemas en su aprendizaje, las representaciones en matemáticas pueden ser figuras, símbolos, notaciones, gráficos, etc. Así, las representaciones semióticas son relativas a un sistema particular de signos, como el lenguaje, escritura algebraica o gráficas, las cuales pueden ser convertidas en otras representaciones equivalentes en otro *sistema semiótico*¹. Las representaciones semióticas dependen primordialmente de las representaciones mentales y son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática (Duval, 1999). De igual forma, Duval (1996) expone que una representación semiótica se puede definir como el conjunto signo y objeto.

“Según Duval (2006), se movilizan cuatro tipos de representación semiótica en matemáticas, están los registros monofuncionales discursivos y no discursivos, y los registros multifuncionales discursivos y no discursivos”.

TIPOS DE TRANSFORMACIÓN DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

Según Duval & Saenz (2016), existen dos tipos de transformación de representación semiótica que son totalmente diferentes, en los cuales los procesos cognitivos son distintos, tratamientos y conversiones. El tratamiento hace referencia a las transformaciones de las representaciones que ocurren internamente en el mismo registro;

¹ Duval (2006) define un sistema semiótico como un conjunto de reglas para combinar signos en expresiones o unidades figurales.

por ejemplo, encontrar la ecuación general del objeto matemático parábola, dada su ecuación canónica y viceversa, y la conversión se entiende como las transformaciones de las representaciones de un objeto matemático que consiste en cambiar de registros, pero sin cambiar de objeto, una transformación permite pasar de un registro a otro, por ejemplo a partir de la gráfica de la parábola encontrar la ecuación canónica y general de esta, aquí se evidencia que se cambia del registro gráfico al algebraico, pero esto requiere la coordinación por parte del estudiante que lo desarrolla.

TIPOS DE REGISTRO DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Según Duval (2006), se movilizan cuatro tipos de representación semiótica en matemáticas, están los registros monofuncionales discursivos y no discursivos, y los registros multifuncionales discursivos y no discursivos. Los monofuncionales son característicos de la matemática, apoyados en las reglas de formación de representaciones, donde los tratamientos asumen la forma de algoritmos, mientras que en los multifuncionales los tratamientos no toman la forma de algoritmos. Los registros multifuncionales discursivos son aquellos en los cuales se hace uso de una lengua, lenguaje natural o lengua materna, para dar explicaciones en un lenguaje común o escritura simbólica; y los registros multifuncionales no discursivos son los que muestran formas, figuras geométricas, diseños y gráficos, allí se puede evidenciar aquello que no es dado de manera visible. Los registros monofuncionales

discursivos son aquellos sistemas de escritura numérica algebraica y simbólica con carácter formal y técnico, apoyados en las reglas de formación de representaciones para sistematizar, formalizar y formular. Los registros monofuncionales no discursivos son configuraciones de unidad figúrales y pone visible los aspectos numéricos. En esta investigación, los registros multifuncionales discursivos se denominaron como *registro verbal*, los registros multifuncionales como *registro gráfico*, los registros monofuncionales discursivos como *registro algebraico* y los registros monofuncionales no discursivos no serán abordados, ya que para este trabajo se considera que no es relevante hacer uso de las configuraciones de unidad figúrales.

METODOLOGÍA

El enfoque de esta investigación fue cualitativo, definido “como un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo visible, lo transforman y convierten en una serie de representaciones en forma de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos” (Hernández, Fernández & Baptista, 2006, p. 9), orientado a la descripción, comprensión e interpretación de situaciones, métodos y procesos que desarrollan los estudiantes en la comprensión del objeto matemático parábola.

El método utilizado para este estudio, de acuerdo con los objetivos propuestos, fue la investigación-acción, entendida “como una forma de búsqueda autorreflexiva, llevado a cabo por los participantes en situaciones sociales (incluyendo las educativas),

para perfeccionar la lógica y la equidad de las propias prácticas sociales o educativas en las que se efectúan estas prácticas” (Kemmis citado en Rodríguez, Gil & García Jiménez, 1999, p. 53). Algunas de las características fundamentales de la investigación-acción, según Rodríguez, Gil & García Jiménez (1999), son:

- Examina los problemas desde el punto de vista de quienes están involucrados en ellos.
- Adopta una postura teórica para cambiar o mejorar las situaciones sociales o prácticas educativas.
- Contempla la situación desde el punto de vista de los participantes, describiendo y explicando las acciones humanas y las situaciones sociales o educativas.
- Analiza lo que ocurre en una situación problema desde un punto de vista de quienes actúan e interactúan en esta, por ejemplo, estudiantes y profesores.

Las anteriores características responden a los propósitos de la investigación, porque se examinaron las dificultades que presentan los estudiantes en la interpretación del objeto matemático parábola, se adoptó una postura teórica con el fin de mejorar la comprensión de este objeto, describir, analizar e interpretar de forma detalladas los procesos, métodos y estrategias que utilizaron los estudiantes en las actividades de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas, y, a partir de esto, establecer niveles de comprensión del objeto matemático parábola.

Para el desarrollo de esta investigación, se realizó un análisis teórico, se diseñó e implementó estrategias de enseñanza que permitieron representar el objeto matemático parábola de diferentes formas; posteriormente, se hace la recolección y análisis de la información.

En el análisis teórico, se realizó un estudio histórico y epistemológico del objeto matemático parábola, se analizó la presentación en los libros de texto y los contenidos relacionados con este objeto, esto con el propósito de establecer los elementos matemáticos que configuran el objeto matemático parábola y las representaciones semióticas de este objeto, que promuevan su comprensión. Este análisis orientó al diseño de estrategias de enseñanza de la parábola basadas en la teoría de las representaciones semióticas.

La implementación de las estrategias de enseñanza del objeto matemático parábola en diferentes formas de representación, fomentó el desarrollo de procesos y métodos en los dos tipos de transformación semiótica, tratamiento y conversión, y permitió obtener información a través de la aplicación de un cuestionario y la realización de entrevistas semiestructuradas. Este estudio se desarrolló en una institución educativa de carácter privado y con la participación de estudiantes del grado décimo.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Hasta el momento, solo se ha aplicado una estrategia de enseñanza que tenía como objetivo explorar, indagar y conocer el registro gráfico de la

parábola, para luego, de forma verbal (registro verbal), explicar lo que es una parábola y además conocer aspectos relacionados con la parábola (vértice, foco, ecuación de la directriz y lado recto). Para esto, se plantearon una serie de preguntas y procedimiento, de tal forma que se pudiera cumplir con el objetivo propuesto; pero, en la ejecución de esta secuencia, se pudo analizar ciertos aspectos que serán mencionados a continuación.

En el proceso de la construcción del objeto matemático parábola, se pudo evidenciar que a los estudiantes les gusta trabajar con material manipulable; en este caso, materiales como icopor, alfileres, hilo, chinchas, cartón y hojas milimetradas, los cuales fueron utilizados para la construcción de la parábola. Algunas de las gráficas de la parábola realizadas por los estudiantes, luego de realizar los pasos descritos anteriormente, son:

Figura 1. Parábola construida estudiante 1.

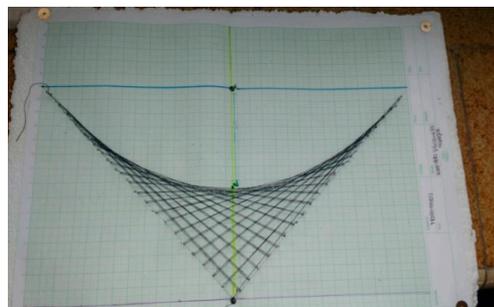
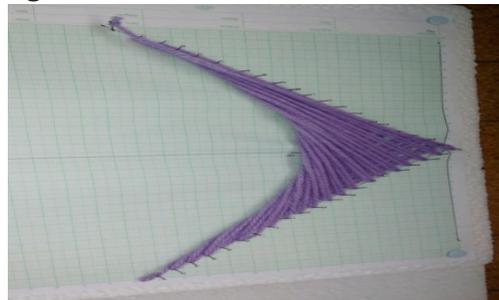


Figura 2. Parábola construida estudiante 2.



Analizando las construcciones realizadas por los estudiantes seleccionados al azar, se puede observar que algunos de los estudiantes no señalan y nombran los puntos de intersección como lo fue propuesto en las indicaciones dadas, esto lleva a pensar que los estudiantes no identifican qué es un punto de intersección (corte entre los segmentos, o corte entre un segmento y una gráfica). Por otro lado, los estudiantes realizan el registro gráfico de la parábola, pero no identifican de manera correcta en la gráfica todos los elementos de este objeto, esto se puede presentar debido a que los estudiantes no han trabajado en los demás registros de la teoría de las representaciones semióticas (gráfico, verbal, algebraico), ya que para comprender un objeto matemático es necesario trabajar en cada uno de los registros y la conversión entre estos; es decir, la adquisición conceptual de un objeto se da a través varias representaciones semióticas, tal como lo argumenta Duval (citado en D'Amore & Radford, 2017).

Luego de haber realizado la respectiva gráfica, se les pidió a los estudiantes que respondieran preguntas dentro de las cuales encontramos las siguientes, describa la gráfica que se obtiene y a qué gráfica (sección cónica) se asemeja lo obtenido. Con estas preguntas, lo que se pretendía era observar e identificar cuáles eran los conocimientos previos que tenían los estudiantes sobre la gráfica obtenida y las representaciones que ellos conocían; a lo cual se pudo constatar que dicha gráfica la relacionan con la función cuadrática, tal como lo argumentan en sus descripciones:

Figura 3. Respuestas estudiante 1.

La gráfica que se obtiene es una gráfica de función cuadrática, esta gráfica abre hacia arriba porque a es mayor que 0 .

Las funciones cuadráticas se consideran por tener la forma de una parábola la cual puede abrir hacia arriba o hacia abajo dependiendo del valor de a .

$a x^2$ término cuadrático
 $b x$ término lineal
 c término independiente

2. A que grafica (sección cónica) se asemeja lo obtenido

Lo obtenido se asemeja a una parábola, los elementos de la parábola son: orientación o concavidad, correspondiente a las ramas, punto de corte con el eje de las abscisas (raíces), puntos de corte con el eje de las ordenadas, eje de simetría y vértice.

Figura 4. Respuestas estudiante 2.

La grafica obtenida es una parábola decreciente con corte en el eje $A(0,0)$. También se puede decir que cumple con la función Cuadrática donde $X < 0$.

2. A que grafica (sección cónica) se asemeja lo obtenido

La sección cónica o grafica se asemeja a una parábola decreciente.

Al responder a las preguntas, los estudiantes relacionan la gráfica que obtuvieron con temáticas a las que en alguna ocasión vieron, evidenciaron o aprendieron; además, se evidencia que los estudiantes a partir de la representación gráfica de la parábola pueden expresan de forma verbal o utilizando un lenguaje común para describir el objeto matemático que allí está representado; al indagar sobre lo afirmado por los estudiantes, ellos argumentan que escribieron esto porque lo habían visto en clases anteriores; además, sostienen que siempre al ver esta gráfica la identifican con una función cuadrática.

Posteriormente, los estudiantes debían ubicar en la gráfica los elementos del objeto matemático parábola y responder una serie de preguntas. Lo que se buscaba con las diferentes tareas asignadas a los estudiantes, era que a partir de estas se familiarizaran con los elementos de la parábola y pudieran describir la parábola como lugar geométrico, tal como lo plantea Lehmann (2003) “una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta” (p. 148). En las gráficas 5 y 6, se puede observar algunas de las consideraciones dadas por los estudiantes al definir el lugar geométrico parábola.

Figura 5. Respuestas estudiante 1.

Parábola compuesta por un vértice, puntos de simetría y eje de simetría, en la cual se puede ubicar un foco y a partir de este encontrar la distancia a otros puntos dentro de la parábola, pero además es posible ubicar la directriz. A partir de ello, se concluye que la medida del foco a los puntos y de los puntos a la directriz es semejante.

Figura 6. Respuestas estudiante 2.

Conjunto de puntos que tienen una misma distancia del foco y de la directriz, formando una curva

respondido, a lo cual, ellos argumentaron que como los puntos que se habían trazado estaban a una misma distancia de 1 cm, entonces iba a hacer un conjunto de puntos que estaban a una misma distancia, es una parábola porque eso fue lo que dijo mi compañera y pues esta abre hacia arriba porque sus brazos están hacia arriba; conjunto de puntos que tienen una misma distancia del foco y de la directriz, ya que cuando medimos los diferentes segmentos nos dio aproximadamente la misma distancia; la parábola está compuesta por un eje de simetría, directriz, vértice y foco, porque fueron los elementos que allí ubicamos, por esto va a estar compuesta por estos.

Lo que se quería al realizar esta secuencia de enseñanza, era que los estudiantes pudieran expresar de forma verbal la definición del lugar geométrico parábola y a la vez construir, expresar, declarar y representar ideas matemáticas utilizando un lenguaje común, esto se logró ya que los estudiantes dieron en su mayoría una aproximación a la definición de este lugar, lo cual lo expresan a través de un lenguaje verbal. Por otra parte, los estudiantes realizan conversión del registro gráfico al registro verbal o lenguaje común, al describir de forma verbal el tipo de gráfica de acuerdo con su representación. Con esta actividad, los estudiantes se acercaron a la noción de parábola, sus elementos (vértice, foco, ecuación de la directriz y lado recto) y su representación gráfica; de igual modo, trabajar en la conversión del registro gráfico al verbal; entendiéndose la conversión como las transformaciones

Al analizar estas respuestas y para constatar lo que escribieron los estudiantes, se les pidió argumentar de forma verbal por lo que habían

de las representaciones de un objeto matemático que consiste en cambiar de registros, pero sin cambiar de objeto (Duval & Saenz Ludlow, 2016).

CONCLUSIONES

Al aplicar la secuencia de enseñanza sobre el objeto matemático parábola basada en la teoría de las representaciones semióticas, se puede resaltar que esta le permitió a los estudiantes movilizar en el registro gráfico de la parábola y, así mismo, pasar del registro gráfico al registro verbal o lenguaje común. Además, en la comprensión del objeto matemático parábola o en acercamiento a la definición de este lugar geométrico, se pudo constatar que a través de esta

secuencia de enseñanza los estudiantes logran dar una definición aproximada del objeto matemático parábola. De igual modo, los estudiantes pudieron expresar de forma verbal y haciendo uso de un lenguaje común, la definición del objeto matemático a partir de la gráfica; es decir, existe una coordinación por parte de las estudiantes por que pasaron de un registro a otro (en este caso, del gráfico al verbal) a lo cual se le conoce como conversión en la teoría de las representaciones semióticas. En el desarrollo de la secuencia, los estudiantes se familiarizaron con los elementos, características y propiedades de la parábola, lo cual les permitió la comprensión y construcción del concepto parábola.

“Al aplicar la secuencia de enseñanza sobre el objeto matemático parábola basada en la teoría de las representaciones semióticas, se puede resaltar que esta le permitió a los estudiantes movilizar en el registro gráfico de la parábola”

REFERENCIAS

- D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 349-382.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali, Colombia: Peter Lang S.A. Editions scientifiques européennes.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.
- Duval, R., & Saenz Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco Jose De Caldas.
- Espinosa Romero, C., & Jiménez Espinosa, A. (2014). Construcción del concepto de razón y razón constante desde la óptica socioepistemológica. *Praxis & Saber*, 5(9), 53 - 80. <https://doi.org/10.19053/22160159.2993>
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.
- Leguizamón Romero, J. (2017). Patrones de interacción comunicativa del profesor universitario de matemáticas. Un estudio de caso. *Praxis & Saber*, 8(16), 57 - 82. <https://doi.org/10.19053/22160159.v8.n16.2017.6200>
- MEN. (1998). *Matemáticas lineamientos curriculares*. Bogotá.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá, Colombia.
- Mesa-López, J. H., Aldana-Bermudez, E., & Alonso-Arboleda, A. (2013). Análisis de la comprensión del concepto de parábola en un contexto universitario. *Respuestas*, 18(2) 74-79.
- Leguizamón Romero, J. (2017). *Patrones de interacción comunicativa del profesor universitario de matemáticas*. Un estudio de caso. *Praxis & Saber*, 8(16), 57 - 82. <https://doi.org/10.19053/22160159.v8.n16.2017.6200>
- Rodríguez Gómez, G., Gil Flores, J., & García Jiménez, E. (1999). *Metodología de la investigación*. Archidona, Málaga: Aljibe.

